

Свешніков С. В., кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
(0000-0001-8924-4535)
Бочарніков В. П., доктор технічних наук, професор
(0000-0003-4398-5551)
Мазуренко І. М., доктор філософії
(0000-0003-2827-7258)

Центр воєнно-стратегічних досліджень Національного університету оборони України, Київ

Регуляризація задачі вибору альтернатив у випадку ідентичності їх узагальнених оцінок

Резюме. У статті пропонується нове правило регуляризації у виключному випадку задачі багатокритеріального вибору, коли різні за природою альтернативи мають однакові узагальнені оцінки, через що зробити вибір не представляється можливим. Пропоноване правило полягає у пошуку такої підмножини характеристик альтернативи, що максимальним чином впливають на її узагальнену оцінку, вибір зводиться до вибору тієї альтернативи, яка має множину визначення, більш пріоритетну з точки зору особи, що приймає рішення.

Ключові слова: багатокритеріальне оцінювання; вибір альтернатив; нечітко-інтегральне обчислення; ієрархічна кластеризація, регуляризація.

Постановка проблеми. У статті [1] автори розглянули проблему коректного вирішення задачі багатокритеріального вибору альтернатив у випадку, коли альтернативи мають однакові оцінки в узагальненому критерії, але різні оцінки в часткових критеріях. Інакше кажучи, різні за природою альтернативи після узагальнення отримують однакові узагальнені оцінки, що ускладнює вибір особою, яка приймає рішення. Формально кажучи, такі альтернативи є рівноцінними з точки зору узагальненого критерію і серед них можна вибрати будь-яку. Утім немає жодної гарантії, що вони дійсно еквівалентні одна одній. Тут необхідно аналізувати більш тонку структуру оцінок. Зрозуміло, що це буде потребувати використання додаткової інформації. Але якої саме?

Як варіант, в [1] було запропоновано опуститися на рівень критеріїв, підпорядкованих узагальненому критерію. Але в цьому випадку кількість оцінок, які потрібно порівняти сильно зростає і вже для трьох альтернатив і трьох критеріїв виходить за межі ергономічних спроможностей людини [2]. Тоді авторами було запропоновано сполучення одного з багатокритеріальних методів оцінювання і методу ієрархічної кластеризації в просторі критеріїв нижчого рівня з використанням еталонної альтернативи, яка відіграє роль правила регуляризації. Регуляризація [3] – певний акт зміни системи оцінювання таким чином, щоб вона слідувала законам розуму або певної логіки. Вона додає ту саму додаткову

інформацію, яка має дозволити прийняти найбільш адекватне рішення.

Зокрема, у статті [1] було запропоновано сформувати еталонну альтернативу з максимальних оцінок наявних альтернатив в критеріях і робити вибір тієї альтернативи, яка максимально еквівалентна еталонній, тобто знаходиться в одному кластері з нею. Це дало певний результат, але його не можна вважати надійним, висока невизначеність вибору збереглася і розглянутий випадок потребує додаткових досліджень. Зокрема, аналіз потенційних причин неможливості відобразити природу альтернатив в узагальнених оцінках дозволив запропонувати три напрями дослідження з метою її усунення або як мінімум зменшення. По-перше, дослідження порядку визначення еталонної альтернативи. По-друге, дослідження можливих змін множини часткових критеріїв оцінювання. Зрозуміло, що зміна множини часткових критеріїв не має викривлювати природу (фізичний смисл) системи критеріїв оцінки. І по-третє, дослідження метрики відстані в ієрархічній кластеризації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомі публікації щодо вибору альтернатив на основі багатокритеріальних оцінок, отриманих шляхом узагальнення багатьох критеріїв до одного розглянуті в попередній роботі авторів [1], тому тут не розглядаються.

Мета статті полягає в пошуку шляхів підвищення якості вихідних даних у задачі вибору, які є різними за природою (з різними

оцінками в часткових критеріях), але отримують однакові оцінки в узагальненому критерії.

Виклад основного матеріалу зробимо відповідно до зазначених напрямів досліджень

і спрощеного прикладу задачі оцінювання, описаного в [1]. Зокрема, в Табл. 1 розглядаються оцінки трьох альтернатив у трьох критеріях.

Таблиця 1

Оцінки альтернатив

Критерії Альтернативи	c_1	c_2	c_3
a_2	1	0.2	0.1
a_3	0.1	0.2	1
a_4	0.06	0.2	0.07
a_1 (еталонна)	1	0.2	1

Для забезпечення єдності міркувань з попередньою роботою [1], подальше дослідження здійснюється за наведеними оцінками.

Дослідження порядку визначення еталонної альтернативи. У роботі авторів [1] для визначення еталонної альтернативи використовувалась формула:

$$v(a_1|c_j) = \max_{i=\overline{2, N_A}} v(a_i|c_j), j = \overline{1, 3}, (1)$$

де N_A – потужність множини A альтернатив;

$v(a_i|c_j) \in [0, 1]$ – оцінка альтернативи a_i за критерієм c_j ;

a_1 – еталонна альтернатива;

$$v(a_1|c_j) = (\sum_{i=\overline{2, N_A}} v(a_i|c_j)) / N_A, j = \overline{1, 3}. (2)$$

У результаті розрахунків було отримано розбиття альтернатив на два класи: $\{\{a_2, a_3, a_1\}, \{a_4\}\}$. Нагадаємо, що після формування еталонної альтернативи вона була включена в множину альтернатив як a_1 з одночасним збільшенням на одиницю індексів інших альтернатив. Альтернатива a_4 природним чином сильно відрізняється від інших, тому була виділена в окремий клас. Але альтернативи a_2 і a_3 потрапили в один клас з еталонною і не продемонстрували розрізень між собою. Як і у випадку (1), вихідна інформація для прийняття рішення щодо вибору не покращилась.

Таким чином, зміна оператора агрегування у формуванні еталонної альтернативи не має ефекту. Це можна пояснити за допомогою представлення альтернатив як точки в гіперкубі, утвореному в n -мірному просторі критеріїв. Тоді у випадку (1) еталонна альтернатива може бути представлена вершиною гіперкубу, яка має максимальні координати. Усі інші альтернативи будуть розташовані всередині кубу. У випадку (2) еталонна альтернатива сама буде знаходитись всередині цього кубу. Тому пропозицію, описану виразом (2), можна

c_j – оцінка альтернативи в критерії другого рівня.

Відповідно до формули (1), оцінка еталонної альтернативи a_1 в кожному з критеріїв другого рівня формувалась як максимальна з оцінок всіх альтернатив в цих критеріях. Результат цього наданий у [1] і, як там зазначалось, не є надійним через те, що жодна з альтернатив не увійшла в один клас спільно з еталонною альтернативою a_1 , що свідчить про збереження невизначеності вибору.

Як інший варіант було запропоновано замість операції максимуму в (1) використати середньозважене.

Як інший варіант було запропоновано трактувати як зміну еталонної точки, від якої вимірюється відстань. Але відстань, в силу аксіоми позитивності метричного простору [4], завжди є позитивною. У нашому випадку альтернативи a_2 і a_3 завжди знаходяться в протилежних вершинах гіперкубу. Оскільки еталонна альтернатива породжується їх критеріальними оцінками, то відстань від a_1 до a_2 і a_3 завжди буде однакою і будь-який спосіб побудови еталонної альтернативи не матиме ефекту.

Отже, для пояснення коротко розглянемо філософію оцінювання і подальших перетворень оцінок. Оскільки в результаті перетворення часткових оцінок альтернатив до узагальненої оцінки в головному критерії була втрачена інформація, без якої зробити вибір кращої альтернативи в крайньому випадку не представляється можливим, найбільш логічною пропозицією є введення до задачі деякого правила регуляризації, тобто внесення додаткової інформації. Є важливим те, звідки взяти цю інформацію і наскільки це буде ефективним у сенсі стійкості рішень.

Введення до задачі еталонної альтернативи означає, що регуляризаційну

інформацію було запозичене з множини оцінок альтернатив в критеріях, підпорядкованих узагальненому критерію, тобто власне зсередини задачі. Аналогічний за логікою спосіб вирішення задачі було застосовано в економічних дослідженнях [5] для визначення індикатора ліквідності банків. В указаній роботі на основі статистики оцінок будувалась регресія для визначення пріоритетності показників ліквідності. Але в певних випадках задачу вибору кращої альтернативи не вдається вирішити на основі інформації щодо критеріальних оцінок вищого рівня, оскільки корисна інформація втрачається в процесі узагальнення. Тому розглянемо далі другий напрям дослідження, а саме дослідження можливих змін множини часткових критеріїв оцінювання.

Дослідження можливих змін множини часткових критеріїв оцінювання

Ідея дослідження. Як зазначалось раніше, крайній випадок задачі вибору полягає в тому, що особі, яка приймає рішення, необхідно зробити усвідомлений вибір з двох або більше альтернатив, які мають однакові узагальнені оцінки, але не однакову природу, тобто розрізняються в критеріях нижчого рівня. Відповідно до теорії вибору (див., наприклад [6]), ця задача може бути вирішена на основі залучення додаткової інформації, що може бути взята за межами задачі. В нашому випадку це множина критеріїв нижчого рівня, де віддзеркалюється природа альтернатив.

Ідея полягає у пошуку умовно званої “підмножини визначення альтернативи”, тобто підмножини тих характеристик альтернативи, які переважним чином впливають на її узагальнену оцінку. Якщо особі, яка приймає рішення додатково надавати цю підмножину, то у випадку рівності узагальнених оцінок, вона буде тією ключовою інформацією, що дозволить вирішити задачу вибору.

Наприклад, в задачі оцінювання і вибору системи зенітного ракетного озброєння [7] ієрархічна система критеріїв на рівні, передуючому узагальненому, містить три критерії: бойове застосування, логістика і технічне обслуговування та ремонт. Оскільки системи озброєння одного класу часто дуже схожі між собою, не виключається випадок, коли різні системи мають однакові узагальнені оцінки і різні оцінки в зазначених критеріях. Тобто одна оцінювана система озброєння більш орієнтована на бойове застосування, а інша краще відповідає

вимогам ремонтпридатності. Саме цей випадок відображено в Табл. 1?. В подібних випадках зробити розумний вибір дуже важко. Тому додаткова інформація щодо підмножин визначення цих систем озброєння буде корисною. Зазначимо, що випадок рівності і узагальнених оцінок, і підмножин визначення буде однозначно свідчити про ідентичність альтернатив.

Отже, виходячи з цього, головною пропонованою ідеєю є знаходження підмножини визначення кожної альтернативи, тобто такої підмножини, яка переважним чином вплинула на узагальнену оцінку, і пропонування особі, яка приймає рішення, обрати альтернативу, яка має найбільш пріоритетну підмножину визначення.

Реалізація ідеї дослідження. Для реалізації декларованої ідеї скористаємось відомим підходом до вирішення схожої задачі. В роботі [8] автори запропонували алгоритм пошуку еталонної альтернативи в нечіткій ієрархічній задачі [1, 9] оцінювання альтернатив (тут і далі йдеться про еталонну альтернативу в задачі оцінювання, а не кластеризації). Розглянемо цей алгоритм більш детально.

Для цього потрібно ввести поняття градації. Саме градації містять потрібну додаткову інформацію про природу альтернатив. Градаціями будемо називати можливі варіанти значень певної характеристики альтернативи. Наприклад, в згаданій задачі оцінювання систем озброєння [7] характеристика “захищеність від перешкод” може бути визначена на множині градацій {висока, припустима, недостатня, низька}.

Альтернативи відрізняються одна від одної оцінками градацій (значеннями характеристик) незалежно від системи критеріїв оцінювання.

У класичній задачі оцінювання альтернатив розраховуються оцінки їх відповідності неявному еталону, формалізованому у вигляді ієрархії критеріїв. Різні альтернативи отримують оцінки в наявних критеріях, в залежності від значень своїх характеристик. Виникає питання про існування певної альтернативи, значення характеристик якої забезпечують максимум її узагальненої оцінки, тобто еталонної альтернативи, яка в максимальному ступені відповідає системі критеріїв. Іншими словами, якщо існує еталон оцінки, має існувати еталонна альтернатива.

Виходячи з властивостей нечіткого інтеграла [10], можна легко відповісти на це питання. А саме, та альтернатива буде мати максимально можливу узагальнену оцінку, у котрої усі характеристики за усіма градаціями матимуть максимальну оцінку (у прийнятій шкалі – одиницю). Зауважимо, що множина градацій сформульована таким чином, що під час оцінки характеристики вибір лише однієї градації буде мати максимальну чіткість. Якщо буде обрано усі градації, значення характеристики матиме максимальну нечіткість. Але таке тривіальне рішення (одинична оцінка усіх градацій в усіх характеристиках) буде мати також максимальну ступінь нечіткості і робити висновок по такому рішенню неможливо, тому поряд з критерієм максимальної узагальненої оцінки необхідно використовувати критерій мінімальної нечіткості еталонної альтернативи.

В узагальненому вигляді запропонований в [8] алгоритм пошуку еталонної альтернативи полягає в наступному.

Крок 1. Спочатку розраховується узагальнена важливість градацій. Для цього оцінка кожної градації кожної характеристики еталонної альтернативи встановлюється в одиницю при нульових значеннях всіх інших градацій в усіх інших характеристиках. Тоді узагальнена оцінка еталонної альтернативи буде відображати узагальнену важливість градації.

Крок 2. Створюється універсум градацій шляхом перелічення градацій за зменшенням їх узагальненої важливості. Таким чином, на початку універсуму будуть розташовані градації, які максимальним чином впливають на узагальнену оцінку. В кінці множини універсуму будуть розташовані градації, які або зовсім не впливають на неї, або впливають мінімально.

Крок 3. Далі градації з універсуму, починаючи з початку, послідовно встановлюються в одиницю і здійснюється розрахунок узагальненої оцінки, яка (відповідно до властивостей нечіткого інтеграла) поступово зростає від 0 до 1. При цьому також розраховується чіткість еталонної альтернативи, яка поступово зменшується від 1 до 0, оскільки число “включених” градацій одних і тих же характеристик збільшується.

Крок 4. У точці перетинання обох функцій універсум розділяється на множину з більшим і множину з меншим вкладом в узагальнену оцінку. Характеристики, які

потрапляють у першу множину і утворюють еталонну альтернативу. Критерії, які за ієрархією критеріїв еталону зв'язані з характеристиками еталонної альтернативи, можна також назвати найбільш чітким ядром системи переваг.

Цей алгоритм дає змогу визначити множину характеристик гіпотетичної альтернативи, яка відображує властивості самого еталону, а саме – найбільш чітку множину характеристик, які максимальним чином впливають на узагальнену оцінку.

У задачі, що розглядається, необхідно теж визначити множину характеристик альтернативи, які максимальним чином вплинули на узагальнену оцінку. Але тут йдеться про множину характеристик конкретної альтернативи. Для різних альтернатив ці множини відрізнятимуться, оскільки відрізнятимуться їх оцінки характеристик. У нашому випадку множина визначення альтернативи залежатиме і від еталону (критеріїв, їх зв'язків та важливості), і від оцінок, наданих характеристикам альтернативи.

Виходячи з цього, для розв'язання означеної задачі було запропоновано дещо модернізувати алгоритм пошуку еталонної альтернативи. Зокрема, замість встановлення в одиницю оцінок градацій з універсуму (див. Крок 3) пропонується встановлювати оцінки не в одиницю, а в ті значення, які має відповідна градація відповідної характеристики альтернативи. Таким чином найбільш чітка підмножина характеристик, які визначили узагальнену оцінку цієї конкретної альтернативи, буде визначена як підмножина універсуму, що розташована зліва від точки перетину зростаючої функції узагальненої оцінки і спадаючої функції чіткості визначення характеристик альтернативи.

Оскільки алгоритм пошуку підмножини визначення альтернативи передбачає розгляд градацій, розкриємо спочатку алгоритм оцінювання альтернатив з врахуванням градацій критеріїв нижнього рівня, а також алгоритм оцінювання чіткості характеристик альтернатив.

Алгоритм оцінювання альтернатив з врахуванням градацій критеріїв нижнього рівня. Розглянемо загальний випадок дворівневої ієрархічної задачі оцінки, де зв'язки критеріїв мають значення важливості і можуть бути формалізовані за допомогою різних математичних конструкцій, наприклад нормованих важливостей, нечітких мір тощо. Тут розглядатиметься випадок нечітких мір.

Як і на рис. 1, на першому (вищому) рівні узагальнення розташовано єдиний критерій, на другому – множина критеріїв. Кожний критерій другого рівня містить свою множину градацій. Наявні альтернативи описано множиною характеристик, яка співпадає з множиною критеріїв другого рівня. Для кожної з характеристик кожної альтернативи завдано значення на множині градацій, яке формалізує поточне значення характеристики. Значення характеристик кожної альтернативи порівнюються з важливістю градацій в критеріях другого рівня і визначаються узагальнені оцінки альтернативи в цих критеріях. Порівняння здійснюються за допомогою нечіткого інтеграла [11]. Потім ці оцінки узагальнюються по усіх критеріях другого рівня з врахуванням їх важливості і визначається узагальнена оцінка альтернативи в критерії вищого рівня. Це короткий опис структури ієрархічної задачі оцінювання і алгоритму її вирішення.

Для формального опису структури задачі і алгоритму оцінювання зробимо такі позначення. Нехай:

GC – узагальнений критерій вищого рівня ієрархії (**G**eneralized **C**riterion);

$C = \{c_j, j = \overline{1, N_C}\}$ – множина критеріїв другого рівня ієрархії, де $N_C = Card(C)$;

$G^j = \{g_k^j, k = \overline{1, N_{G^j}}\}$ – множина градацій критерію c_j , де $N_{G^j} = Card(G^j)$;

$A = \{a_i, i = \overline{1, N_A}\}$ – множина альтернатив.

Алгоритм розрахунку узагальненої оцінки альтернативи a_i має два кроки.

Крок 1. Розрахунок оцінок альтернативи a_i в критеріях другого рівня:

$$v(a_i|c_j) = (s) \quad (1)$$

де $h(a_i|g_k^j)$ – значення оцінок альтернативи a_i в градації g_k^j ;

$e(\cdot): 2^{G^j} \rightarrow [0,1]$ – нечітка міра важливості градацій j -го критерія з щільністю $e(g_k^j): G^j \rightarrow [0,1]$;

$(s) \int$ – інтеграл Сугено.

Крок 2. Розрахунок оцінок альтернативи a_i в узагальненому критерії:

$$v(a_i|GC) = (s) \int_{c_j \in C} v(a_i|c_j) \circ e^{GC}(\cdot), \quad (2)$$

де $v(a_i|GC)$ – узагальнена оцінка альтернативи a_i в критерії GC ;

$e^{GC}(\cdot): 2^C \rightarrow [0,1]$ – нечітка міра важливості критеріїв з C з щільністю $e^{GC}(c_j): C \rightarrow [0,1]$.

Алгоритм оцінювання чіткості характеристик альтернатив. Розглянемо також алгоритм розрахунку оцінок чіткості альтернативи, який виходить з такої логіки. Альтернатива буде вважатись максимально чіткою, якщо кожна характеристика буде оцінена за допомогою лише однієї градації. Навпаки, альтернатива буде вважатись максимально нечіткою, якщо кожна характеристика буде оцінена за допомогою одночасно всіх градацій. Таким чином, для розрахунку чіткості альтернативи алгоритм повинний мати два таких кроки.

Крок 1. Оцінювання нечіткості кожної характеристики:

$$\alpha(a_i|c_j) = (s) \int_{g_k^j \in G^j} d(a_i|g_k^j) \vartheta(\cdot), \quad (3)$$

$$\text{де } d(a_i|g_k^j) = \begin{cases} 1, h(a_i|g_k^j) \neq 0, \\ 0, h(a_i|g_k^j) = 0; \end{cases}$$

$\vartheta(\cdot): 2^{G^j} \rightarrow [0,1]$ – нечітка міра нечіткості j -ї характеристики.

Функція $d(a_i|g_k^j)$ є характеристичною функцією оцінок альтернативи в j -ій характеристиці. Вона задається на множині градацій G^j і дорівнює 1 якщо оцінка альтернативи в градації відрізняється від 0. В протилежному випадку значення функції встановлюється в 0. Нечітка міра $\vartheta(\cdot)$ задається на множині всіх підмножин множини градацій G^j з однаковою щільністю, оскільки з точки зору оцінки нечіткості всі градації мають однаковий пріоритет. Ця міра має бути субадитивною, а рівні щільності мають бути визначені таким чином, щоб забезпечити близьке до лінійного зростання $\alpha(a_i|c_j)$. Це питання обговорюється далі.

Крок 2. Оцінювання узагальненої нечіткості всіх характеристики:

$$\alpha(a_i|GC) = (s) \int_{c_j \in C} \alpha(a_i|c_j) \vartheta^{GC}(\cdot), \quad (4)$$

де $\vartheta^{GC}(\cdot): 2^G \rightarrow [0,1]$ – нечітка міра важливості характеристик для визначення нечіткості альтернативи.

Нечітка міра $\vartheta^{GC}(\cdot)$, аналогічно мірі $\vartheta(\cdot)$, має бути субадитивною, щільності міри мають бути однаковими і мають бути визначені таким чином, щоб забезпечити близьке до лінійного зростання $\alpha(a_i|GC)$.

Алгоритм пошуку підмножини визначення альтернативи. Описаний алгоритм оцінювання альтернатив з врахуванням градацій критеріїв нижнього рівня може бути представлений у вигляді функції

$$F^{gen}(X) = v(a_i|GC), X = \bigcup_{j=\overline{1, N_C}} G^j, \quad (5)$$

де множина X утворюється шляхом об'єднання всіх множин градацій.

Аналогічним чином може бути представлений алгоритм розрахунку чіткості альтернатив:

$$F^{fuzzy}(X) = \alpha(a_i | GC).$$

Універсум градацій $Y = \{y_l, l = \overline{1, N_Y}\}$, де $N_Y = \sum_{j=\overline{1, N_C}} Card(G^j)$ може бути завданий як область значень $Y = Im R$ відображення $R: X \rightarrow Y$, як показано в Табл. 2.

Таблиця 2

Відображення $R: X \rightarrow Y$												
X	g_1^1	g_2^1		$g_{N_{G^1}}^1$	g_1^2	g_2^2		$g_{N_{G^2}}^2$	$g_1^{N_C}$	$g_2^{N_C}$		$g_{N_{G^{N_C}}}^{N_C}$
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Y	y_1	y_2	...									y_{N_Y}

Зворотнє відображення визначається як область визначення відображення $R: X = R^{-1}(Y)$. Тоді алгоритм пошуку підмножини визначення альтернативи a_i міститиме такі кроки:

$$f^{gen}(a_i | y_l) = F^{gen}(X), h(a_i | x_l) = h(a_i | g_k^j), l = \overline{1, N_Y}, \forall n \neq l, h(x_n) = 0.$$

Тобто для кожного елементу універсуму його оцінка встановлюється в значення оцінки відповідної градації, інші оцінки інших елементів встановлюються в нуль і

та отримання нової відсортованої функції $f^{gen}(a_i | y_l^{a_i})$

Крок 4. Розрахунок функції $f^{fuzzy}(a_i | y_l^{a_i}): Y \rightarrow [0, 1]$ оцінки чіткості альтернативи відповідно до виразів (3) і (4):

$$f^{fuzzy}(a_i | y_l^{a_i}) = F^{fuzzy}(X), l = \overline{1, N_Y}, d(a_i | y_n^{a_i}) = \begin{cases} 1, n \leq l, \\ 0, n > l, \end{cases}$$

яка зростає або не спадає (відповідно до властивостей нечіткого інтегралу).

Крок 5. Пошук підмножини визначення альтернативи a_i .

Оскільки функція $f^{gen}(a_i | y_l^{a_i})$ відсортована за зменшенням, а функція $f^{fuzzy}(a_i | y_l^{a_i})$ зростає від 0, то на множині

$$Z^{a_i} = \{y_l | l = \overline{1, n}, f^{gen}(a_i | y_n) = f^{fuzzy}(a_i | y_n)\}.$$

Потім визначається підмножина характеристик $C_{def}^{a_i}$, чії градації $y_l^{a_i}$ потрапили до множини Z^{a_i} :

$$C_{def}^{a_i} = \{c_j | \exists g_k^j \in R^{-1}(Z^{a_i}), k = \overline{1, N_{G^j}}\}.$$

Отже, ця підмножина є підмножиною визначення альтернативи a_i .

Приклад розв'язання задачі пошуку підмножин визначення характеристик. Розглянемо той же випадок оцінювання трьох альтернатив, аналогічний представленому в попередній роботі [1]. Для того, щоб продемонструвати роботу запропонованого алгоритму пошуку підмножини визначення альтернатив, було доповнено ієрархію з [1], як

Крок 1. Формування універсуму градацій:

$$Y = Im R = \{y_l, l = \overline{1, N_Y}\}.$$

Крок 2. Розрахунок функції $f^{gen}(a_i | y_l): Y \rightarrow [0, 1]$ узагальненої важливості кожної градації:

здійснюється розрахунок узагальненої оцінки за виразами (1) і (2).

Крок 3. Сортування Y за зменшенням узагальненої важливості градацій $f^{gen}(a_i | y_l)$:

Y^{a_i} існує точка перетину функцій. Тому спочатку на множині Y^{a_i} визначається підмножина $Z^{a_i} \in Y^{a_i}$, що розташована зліва від точки перетину функцій узагальненої важливості градацій і чіткості альтернативи a_i :

показано на рис. 1. Зокрема, для кожного критерію другого рівня було приписано п'ять градацій з однаковим розподілом важливості на множині градацій (для спрощення обчислень). У Табл. 3 надано оцінки важливості критеріїв еталону, визначені експертним шляхом. У Табл. 4 надано розраховані відповідно до виразів (1) і (2) оцінки трьох альтернатив в усіх критеріях.

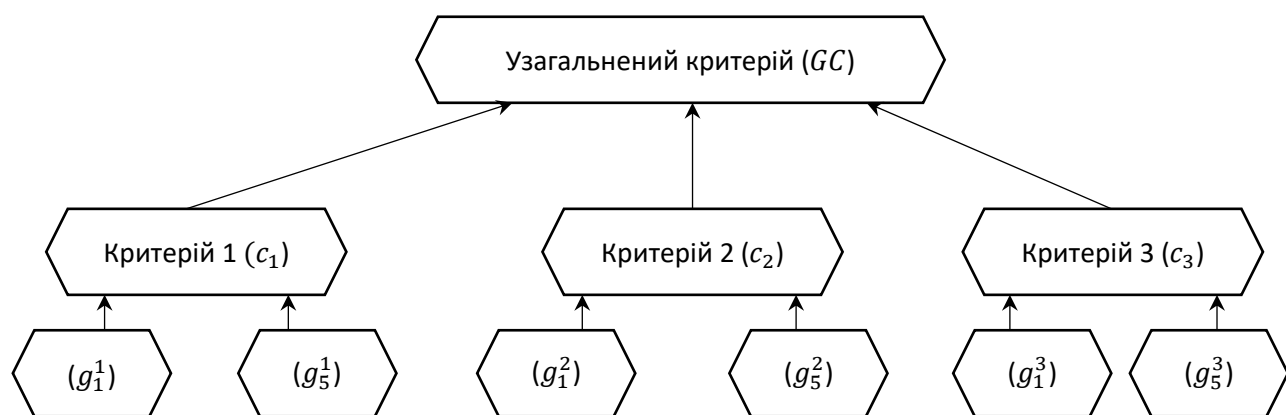


Рис.1. Ієрархічна структура критеріїв оцінки

Таблиця 3

Важливості критеріїв еталону					
Критерій		GC			
й	Підпорядковані критерії	c_1	c_2	c_3	
	Важливість критеріїв	1	0.25	0.1	
Критерій		c_1			
й	Градації	g_1^1	g_2^1	g_3^1	g_4^1 g_5^1
	Важливість градацій	1	0.75	0.5	0.25 0
Критерій		c_2			
й	Градації та їх важливості	аналогічно c_1			
Критерій		c_3			
й	Градації та їх важливості	аналогічно c_1			

Таблиця 4

Оцінки альтернатив у критеріях					
Оцінки альтернативи a_1 в критеріях еталону					
Критер		GC			
ii	Оцінки	0.5			
Критер		c_1	c_2	c_3	
ii	Оцінки	1	0.2	0.1	
Градац		g_1^1	g_2^1	g_3^1	g_4^1 g_5^1
ii	Оцінки	1	0.494	0.633	0.803 0.226
Градац		g_1^2	g_2^2	g_3^2	g_4^2 g_5^2
ii	Оцінки	0.117	0.034	0.2	0.109 0.577
Градац		g_1^3	g_2^3	g_3^3	g_4^3 g_5^3
ii	Оцінки	0.034	0.079	0.075	0.1 0.301
Оцінки альтернативи a_2 в критеріях еталону					
Критер		GC			
ii	Оцінки	0.5			
Критер		c_1	c_2	c_3	
ii	Оцінки				

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДІЯЛЬНОСТІ ЗБРОЙНИХ СИЛ

	Оцінки	0.1	0.2	1		
ii	Градац	g_1^1	g_2^1	g_3^1	g_4^1	g_5^1
	Оцінки	0.075	0.1	0.064	0.019	0.354
ii	Градац	g_1^2	g_2^2	g_3^2	g_4^2	g_5^2
	Оцінки	0.2	0.154	0.06	0.192	0.041
ii	Градац	g_1^3	g_2^3	g_3^3	g_4^3	g_5^3
	Оцінки	1	0.626	0.791	0.117	0.06
Оцінки альтернативи a_3 в критеріях еталону						
ii	Критер	GC				
	Оцінки	0.5				
ii	Критер	c_1	c_2	c_3		
	Оцінки	0.06	0.2	0.07		
ii	Градац	g_1^1	g_2^1	g_3^1	g_4^1	g_5^1
	Оцінки	0.008	0.06	0.03	0.049	0.117
ii	Градац	g_1^2	g_2^2	g_3^2	g_4^2	g_5^2
	Оцінки	0.2	0.075	0.173	0.188	0.358
ii	Градац	g_1^3	g_2^3	g_3^3	g_4^3	g_5^3
	Оцінки	0.041	0.049	0.07	0.041	0

Як можна бачити, оцінки альтернатив в критеріях $\{c_j, j = \overline{1,3}\}$ збереглися аналогічними тим, що зазначені в Табл. 1.

Далі, відповідно до виразу (5), було розраховано і відсортовано за зменшенням узагальнені важливості $F^{gen}(Y)$ альтернатив,

розраховано оцінки чіткості альтернативи відповідно до виразів (3) і (4), а також знайдено підмножини визначення альтернатив – головну мету цього дослідження. Усі ці оцінки наведено в Табл. 5.

Таблиця 5

Оцінки і підмножини визначення альтернатив

Універсум градацій																
X	g_1^1	g_2^1	g_3^1	g_4^1	g_5^1	g_1^2	g_2^2	g_3^2	g_4^2	g_5^2	g_1^3	g_2^3	g_3^3	g_4^3	g_5^3	
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	
Альтернатива a_1																
$F^{gen}(X)$	0.5	.494	.5	.25		.117	.034	.2	.109		.034	.079	.075	.1		
Y^{a_1}	y_1	y_3	y_2	y_4	y_8	y_6	y_9	y_{14}	y_{12}	y_{13}	y_7	y_{11}	y_5	y_{10}	y_{15}	
$f^{gen}(a_1 y_l^{a_1})$	0.5	.5	.494	.25	.2	.117	.109	.1	.079	.075	.034	.034				
$f^{fuzzy}(a_1 y_l^{a_1})$	0.0	.07	.07	.07	.1	.235	.293	.296	.293	.418	.418	.665	.665	.665		
$Z^{a_1} = \{g_1^1, g_3^1, g_2^1, g_4^1, g_3^2\}$																
$C_{def}^{a_1} = \{c_1, c_2\}$																
Альтернатива a_2																
$F^{gen}(X)$	0	.075	.1	.064	.019	.2	.154	.06	.192		.5	.5	.5	.117		
Y^{a_2}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_6	y_9	y_7	y_{14}	y_2	y_1	y_3	y_8	y_4	y_5	y_{10}	y_{15}	
$f^{gen}(a_2 y_l^{a_2})$	0	.5	.5	.5	.2	.192	.154	.117	.1	.075	.064	.06	.019			
$f^{fuzzy}(a_2 y_l^{a_2})$	0	.07	.07	.07	.1	.235	.293	.293	.293	.293	.418	.418	.665	.0665	.665	
$Z^{a_2} = \{g_1^3, g_2^3, g_3^3, g_1^2\}$																

$C_{def}^{a_2}=\{c_2, c_3\}$															
Альтернатива a_3															
$F^{gen}(X)$	,08	,06	,03	,049		,2	,075	,173	,188		,041	,049	,07	,041	
Y^{a_3}	y_6	y_9	y_8	y_1	y_7	y_{13}	y_2	y_4	y_{12}	y_{11}	y_{14}	y_3	y_5	y_{10}	y_{15}
$f^{gen}(a_3 y_l^3)$	,2	,188	,173	,08	,075	,07	,06	,049	,049	,041	,041	,03			
$f^{fuzzy}(a_3 y_l^{a_3})$	,07	,07	,07	,1	,1	,1	,235	,293	,293	,418	,418	,665	,665	,665	
$Z^{a_3} = \{g_1^2, g_4^2, g_3^2\}$															
$C_{def}^{a_3} = \{c_2\}$															

Аналіз розрахунків свідчить про підтвердження вище висунутого припущення щодо можливості відображення природи альтернатив в підмножині їх визначення. Однак потребує певного обговорення розрахунок оцінок нечіткості, а також їх вплив на формування цієї множини.

Як зазначалось раніше, оцінювання нечіткості характеристик здійснюється за допомогою субадитивної нечіткої міри $\vartheta(\cdot)$, яка має однакові щільності. Нечітка міра $\vartheta^{GC}(\cdot)$ тут не досліджується, оскільки її сенс полягає у формалізації не нечіткості, а

важливості характеристик. Рівень щільності визначає значення λ -параметра цих мір і впливає на розташування правої границі підмножини Z^{a_i} . З досвіду розрахунків, найбільша чутливість оцінки нечіткості і лінійність зростання функції $f^{fuzzy}(a_i|y_l^{a_i})$ досягається за $\lambda \in [1,5]$, тому продублюємо розрахунки для трьох варіантів λ -параметра з цього інтервалу. У Табл. 6 надані розраховані підмножини визначення альтернативи a_1 для різних рівнів λ -параметра нечіткої міри $\vartheta(\cdot)$.

Таблиця 6

Підмножини визначення альтернативи a_1 для різних рівнів λ -параметра нечіткої міри $\vartheta(\cdot)$

Альтернатива $a_1, \lambda = 1$														
$f^{gen}(a_1 y_l^{a_1})$	0.5	.5	.494	.25	.2	.117	.109	.1	.079	.075	.034	.034		
$f^{fuzzy}(a_1 y_l^{a_1})$	0.07	.07	.07	.07	.15	.293	.293	.293	.322	.518	.518	.743	.743	.743
$Z^{a_1} = \{g_1^1, g_3^1, g_2^1, g_4^1, g_3^2\}$														
$C_{def}^{a_1} = \{c_1, c_2\}$														
Альтернатива $a_1, \lambda = 3.5$														
$f^{gen}(a_1 y_l^{a_1})$	0.5	.5	.494	.25	.2	.117	.109	.1	.079	.075	.034	.034		
$f^{fuzzy}(a_1 y_l^{a_1})$	0.07	.07	.07	.07	.1	.235	.293	.296	.293	.418	.418	.665	.665	.665
$Z^{a_1} = \{g_1^1, g_3^1, g_2^1, g_4^1, g_3^2\}$														
$C_{def}^{a_1} = \{c_1, c_2\}$														
Альтернатива $a_1, \lambda = 5$														
$f^{gen}(a_1 y_l^{a_1})$	0.5	.5	.494	.25	.2	.117	.109	.1	.079	.075	.034	.034		
$f^{fuzzy}(a_1 y_l^{a_1})$	0.07	.07	.07	.07	.08	.198	.293	.293	.293	.371	.371	.625	.625	.625
$Z^{a_1} = \{g_1^1, g_3^1, g_2^1, g_4^1, g_3^2\}$														
$C_{def}^{a_1} = \{c_1, c_2\}$														

Аналіз табл. 6 показує, що множина визначення альтернативи a_1 не залежить від рівня субадитивності нечіткої міри $\vartheta(\cdot)$ за умови $\lambda \in [1,5]$, тобто навіть якщо він змінюється в п'ять разів. Менші значення λ -параметра збільшують нахил функції нечіткості $f^{fuzzy}(a_1|y_l^{a_1})$, більші значення – зменшують, але точка перетину з функцією

$f^{gen}(a_1|y_l^{a_1})$ не зміщується. Тобто рішення, отримане за допомогою пропонованого алгоритму, можна вважати стійким.

Висновки. Отже, це дослідження було мотивовано виключним випадком у багатокритеріальних ієрархічних задачах вибору, а саме коли узагальнені оцінки двох і більше альтернатив виявляються рівними, але самі альтернативи мають різну природу, тобто

значення їх характеристик відрізняються. Вочевидь для вибору в такому випадку потрібна додаткова інформація про природу альтернатив, оскільки ця інформація була втрачена під час узагальнення.

Одним з варіантів вирішення була ідея використати розрізнення оцінок альтернатив в критеріях, які в ієрархії передують найбільш узагальненому критерію, і сформувані еталонну альтернативу. Тоді вибір було б можна здійснювати в результаті ієрархічної кластеризації за ознакою еквівалентності альтернатив з еталонною альтернативою. Але ця ідея працює лише у випадку, коли оцінки наявних альтернатив в критеріях, що передують узагальненому, відрізняються одна від одної за значеннями. Якщо оцінки ідентичні за значеннями, але відрізняються по номерах критеріїв, ідея не працює. Це відбувається тому, що спосіб визначення відстані від еталонної альтернативи заснований на симетричних нормах, тобто відстань двох альтернатив від еталонної буде однаковою.

Іншим варіантом додаткової інформації про природу альтернатив було запропоновано використати оцінки градацій характеристик альтернатив. Цю інформацію можна назвати базовою, вона не залежить від подальшої процедури узагальнення в ієрархії критеріїв. Якщо природа альтернатив відрізняється одна від одної, оцінки градацій їх характеристик завжди будуть різними. У протилежному випадку це будуть повністю ідентичні альтернативи. Для того, щоб визначити природу конкретної альтернативи, необхідно знайти характеристики, які визначальним чином вплинули на її узагальнену оцінку. Для цього було запропоновано алгоритм, який спочатку визначає узагальнену важливість кожної градації кожної характеристики, впорядковує їх за зменшенням, а також розраховує узагальнену нечіткість альтернативи. Узагальнена важливість градацій і узагальнена нечіткість альтернативи можна розглядати відповідно як спадаючу і зростаючу функції, які завдані на одній множині усіх градацій усіх характеристик. Оскільки функція узагальненої на правому кінці множини градацій завжди дорівнює одиниці (в силу властивості нечіткого інтеграла Сугено), ці функції обов'язково перетинаються. Підмножина градацій, що розташована зліва від точки перетинання буде містити градації, які максимальним чином вплинули на узагальнену оцінку альтернативи і одночасно забезпечили її максимальну

чіткість, тобто ця підмножина може бути названа підмножиною визначення альтернативи.

Тоді вибір найкращої альтернативи в описаному вище виключному випадку зводиться до вибору тієї альтернативи, яка має більш пріоритетну множину визначення з точки зору особи, що приймає рішення. За смислом множина визначення альтернативи ідентична запровадженню правила регуляризації. У разі, коли підмножини Z^{a_i} відрізняються за потужністю, можна рекомендувати особі, що приймає рішення, обирати ту альтернативу, яка має множину визначення з більшою потужністю, оскільки градації такої альтернативи у сукупності будуть мати більший вплив на узагальнену оцінку і, отже, відповідати еталону оцінки в більшому ступеню.

Основним **напрямом подальших досліджень** є визначення у [1] напрям, який стосується дослідження можливості використання несиметричних відстаней для формування відношення схожості або слабкої схожості в ієрархічній кластеризації. Можливість цього напрямку базується на припущенні, що несиметричні відстані дадуть змогу проявити розрізнення альтернатив, які відрізняються не значеннями оцінок в критеріях, передуючих найбільш узагальненому, а лише порядковими номерами цих критеріїв. Цей напрям також можна назвати спробою використати інформацію про порядок оцінок альтернатив.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. С. В. Свешніков, В. П. Бочарніков, П. А. Ковальчук. Проблема коректного вирішення задачі багатокритеріального вибору альтернатив на основі методів зведення кількох критеріїв до одного // Збірник наукових праць ЦВСД НУОУ. 2024. № 1 (80). С. 115–126.
2. Saaty T. L. Relative measurement and its generalization in decision making why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors the analytic hierarchy/network process. Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. 102, 2008. P. 251–318. URL: <https://cutt.ly/AXeD53j>.
3. Регуляризация. URL: <http://surl.li/pxlvke>.
4. Метрическое пространство. URL: <https://crocodata.io/series/la1/2>.
5. Гамбаров Г. М. Метод регуляризации финансовых показателей по Парето // Финансы и кредит. 2006. №. 26 (230). С. 17–25. URL: <http://surl.li/utmnrt>.
6. Стиглер Д. Экономическая теория информации. Теория фирмы / под ред. В. М. Гальперина. СПб.

- : Экономическая школа. 1995. С. 507–529. URL: <http://surl.li/bzsjqu>.
7. Sveshnikov S., Bocharnikov V., Mudrak Y. Evaluation and choice of an anti-aircraft missile system under uncertain conditions based on fuzzy-integral calculus and hierarchical cluster analysis // *Operations Research and Decisions*. 2024. Т. 34, No. 2. P. 135–161. URL: <http://surl.li/wetuil>.
 8. Герасимов Б. М., Бочарников В. П., Свешников С. В. Определение эталонной альтернативы в нечеткой задаче выбора // *Автоматизация виробничих процесів*. 2000. № 1 (10). С. 90–96.
 9. Бочарников В. П., Свешников С. В., Тимошенко Р. І., Павленко В. І. Технологія аналізу воєнно-політичної обстановки. Київ : НУОУ, 2019. 384 с.
 10. Estimating the potential willingness of the state to use military force based on the Sugeno fuzzy integral / S. Sveshnikov et al. // *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2022. Т. 32, №. 3. P. 325–356. URL: <http://surl.li/ibqnkf>.
 11. Pospelov D. A. *Fuzzy Sets in Management and Artificial Intelligence Models*. Moscow : Nauka, 1986.

Стаття надійшла до редакційної колегії 18.11.2024

Regularization of the problem of choosing alternatives in the case of identity of their generalized estimates

Annotation

In the previous article – the Collection of scientific papers of the Center for Military and Strategic Studies of the NDU of Ukraine № 1 (80) it was proposed to form a reference alternative from the maximum scores of the available alternatives in the criteria and to choose the alternative that is as equivalent as possible to the reference one, i.e., is in the same cluster with it. This provided a certain result, but it cannot be considered reliable, the high uncertainty of the choice remains, and the case under consideration requires additional research. In particular, the analysis of potential reasons for the inability to reflect the nature of alternatives in generalized assessments allowed us to propose three areas of research to eliminate or at least reduce it. First, a study of the procedure for determining the reference alternative. Secondly, the study of possible changes in the set of partial evaluation criteria. It is clear that a change in the set of partial criteria should not distort the nature (physical meaning) of the system of evaluation criteria. And third, the study of the distance metric in hierarchical clustering.

The purpose of the article is to find ways to improve the quality of the initial data in the selection problem, which are different in nature (with different scores in partial criteria), but receive the same scores in the generalized criterion.

The article proposes a new regularization rule in the exceptional case of a multi-criteria choice problem, when alternatives of different nature have the same generalized scores, which makes it impossible to make a choice. The proposed rule is to find a subset of the characteristics of an alternative that maximally affect its generalized assessment, and the choice is reduced to selecting the alternative that has a set of definitions that is more prioritized from the point of view of the decision maker.

Keywords: multi-criteria evaluation; choice of alternatives; fuzzy integral calculus; hierarchical clustering, regularization.