

Свешніков С. В., кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
(0000-0001-8924-4535)
Бочарніков В. П., доктор технічних наук, професор
(0000-0003-4398-5551)
Ковальчук П. А.
(0000-0002-9434-444X)

Центр воєнно-стратегічних досліджень Національного університету оборони України, Київ

Алгоритм нечітких кількісних обчислень для оперативних розрахунків

Резюме. У статті пропонується новий алгоритм нечіткої арифметики (виконання арифметичних операцій з операндами, які представлені як нечіткі числові величини) для виконання оперативних розрахунків. На відміну від відомих алгоритмів, запропонований алгоритм ефективно стримує збільшення носія результату послідовності кількох арифметичних операцій, що робить його придатним для оперативних розрахунків в умовах невизначеності.

Ключові слова: нечітка арифметика; нечітка числова величина; принцип максимуму ентропії; нечіткі множини; алгоритм; оперативні розрахунки.

Постановка проблеми. Виконання арифметичних обчислень під час оперативних розрахунків на практиці майже завжди пов'язано з кількісними величинами, значення яких можна визначити лише приблизно. Відстань до лінії зіткнення, кількість озброєння та військової техніки, час виконання маневру є лише деякими прикладами таких величин.

Невизначеність кількісних величин може мати різну природу та породжуватись неповнотою даних, неточністю лінгвістичного опису, а також іншими причинами. Для виконання арифметичних розрахунків користувач повинен мати як мінімум три інструменти для:

завдання значень вихідних нечітких величин;

розрахунку значень результуючих нечітких величин (для виконання більшості арифметичних розрахунків часто цілком достатньо використовувати чотири базові арифметичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення, а також ранжування);

розрахунку характеристик результуючих нечітких величин для прийняття рішення.

Ці інструменти мають відповідати таким вимогам:

результати розрахунків не повинні суперечити властивостям арифметичних операцій;

невизначеність результатів має бути коректною композицією невизначеності вихідних величин, тобто результати повинні зберігати природу (характер) невизначеності вихідних величин;

результати мають бути придатними, щоб ухвалити рішення;

обчислювальна складність арифметичних операцій, по можливості, має бути мінімальною, щоб забезпечити комфортну роботу для користувача.

З цих точок зору далі розглянемо відомі підходи до обробки числової невизначеності, їх зручність використання на практиці, а також запропонуємо новий алгоритм арифметичних операцій. На додаток також дамо посилання для завантаження надбудови для Microsoft Excel, в якій реалізовано цей алгоритм.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нечіткі числа та нечітка арифметика були введені Заде [1] та вдосконалені Дюбуа, Прадом [2], а також іншими дослідниками, у тому числі Ягером [3], Міцумото і Танакой [4].

Нечіткі числа. У загальному випадку нечітким числом A називають нечітку множину з носієм, визначеним на множині дійсних чисел: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : y = \mu_A(x)\}$, де $\mu_A(x)$ – функція належності.

Дослідники часто розрізняють нечіткі числа та нечіткі інтервали. Нечітким інтервалом називають [5] стандартну нормальну нечітку множину, визначену на множині дійсних чисел, у якого носій є обмеженим і α -рівневі зрізи є закритими інтервалами, зокрема:

A є нормальною нечіткою множиною, якщо існує замкнений інтервал $[b, c]$, такий що $\forall x \in [b, c], b, c \in \mathbb{R}, b \leq c$ виконано $\mu_A(x) = 1$;

α -зріз A є замкненим інтервалом ${}^{\alpha}A = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha \in (0, 1]\}$;

носій A є обмеженим $\text{Supp} A = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Функція належності нечіткого інтервалу записується так:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} f_A(x), & \text{при } x \in [a, b], \\ 1, & \text{при } x \in [b, c], \\ g_A(x), & \text{при } x \in (c, d], \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (1)$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b \leq c \leq d$, $f_A(\cdot)$ – зростаюча функція, безперервна справа;

$g_A(\cdot)$ – спадна функція, безперервна зліва.

Нечітким числом називають нечіткий інтервал з одномодальною функцією належності: $\mu_A(x) = 1$ для виключно одного $x \in \mathbb{R}$.

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x \otimes y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де $\mu_C(z)$ – функція належності результату $C = A \otimes B$.

Використовуючи α -рівневе уявлення нечітких інтервалів, вираз (2) можна записати так:

$$(A \otimes B) = \{x \otimes y = z \mid \langle x, y \rangle \in {}^{\alpha}A \times {}^{\alpha}B\}, \quad (3)$$

де операція поділу A вимагає B , щоб $\forall \alpha \in (0, 1], y = 0 \notin {}^{\alpha}B$.

Пізнші вдосконалення арифметики нечітких чисел були спрямовані на вирішення кількох питань, одним з яких є виконання властивостей арифметичних операцій, аналогічних властивостям арифметики дійсних чисел, зокрема [6]: комутативність, асоціативність, дистрибутивність, властивості нуля, властивості одиниці, властивості множення. Важливими питаннями є збереження виду функції належності та

Нечіткі числа дозволили описувати числову невизначеність, яка зумовлена різними причинами, наприклад:

статистичний розкид значень унаслідок випадкових зовнішніх впливів;

неточний опис значення змінної;

невпевненість унаслідок незнання.

Нечітка арифметика. Реалізація будь-якої арифметичної операції $\otimes$ на двох нечітких числах A і B виходить з використання принципу розширення Заде:

мінімізація помилок при апроксимації нечітких чисел алгебраїчними функціями.

Дослідники часто використовують [7] нечіткі числа з трикутними функціями належності: $f_A(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $g_A(x) = \frac{d-x}{d-c}$, $b = c$ в.

У цьому випадку виконання арифметичних операцій спрощується, а результат розраховується за допомогою кількох виразів алгебри. Однак, якщо функції належності операндів представлені несиметричними трикутниками, виникає питання про форму функції належності результату, як показано на рис. 1. Дослідження [8] підтверджує, що в разі множення форма функції належності не зберігається.

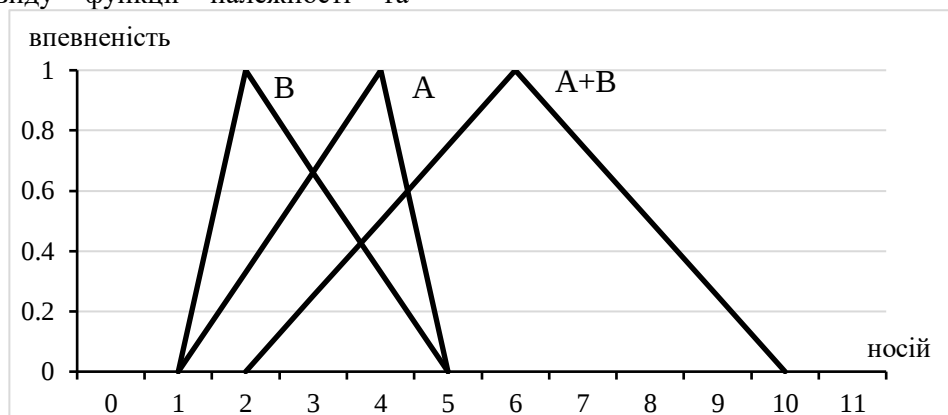


Рис. 1. Зміна форми функції належності при сумуванні двох трикутних нечітких чисел A і B

Як видно, що функція належності результату може мати форму, відмінну від форми функцій належності обох операндів. Цей факт не може бути раціонально пояснений. Обчислювальна складність арифметичних операцій із трикутними нечіткими числами є мінімальною, але на практиці помилки апроксимації нечітких величин можуть бути досить значними. Представлення нечітких чисел трапеціями [9], п'ятикутниками [10], кусково-лінійними

функціями [11] чи нелінійними функціями належності [12–14] зменшує ці помилки, проте питання форми функції належності результату залишається. Дослідження [15] наголошує на втраті інформації у разі використання трикутних нечітких чисел і пропонує використовувати дискретизовані нечіткі числа для вирішення інженерних завдань.

У загальному випадку арифметичні операції з нечіткими числами не є суворими з

точки зору арифметики дійсних чисел, оскільки деякі властивості потребують заміни відношення суворої рівності більш слабким відношення еквівалентності [6]. Тому в роботі [16] для опису нечітких чисел використовуються додаткові елементи (зокрема орієнтація), які частково забезпечують виконання правил арифметики дійсних чисел. Робота [17] присвячена виконанню властивості одиниці для множення нечітких чисел.

Нетрадиційною областю досліджень є представлення нечітких арифметичних операцій на тензорній основі [18].

Ранжування нечітких чисел. У багатьох додатках ранжування нечітких чисел є необхідним для прийняття рішення, наприклад вибору кращої альтернативи, яка описана нечітким числом. Зазвичай для ранжирування використовують дефазифікацію, тобто розрахунок однієї або декількох характеристик (індексів), які узагальнюють інформацію, що міститься у нечіткому числі. Ці показники мають різну інформативність. Тому вибір найбільш показової характеристики залежить від умов конкретного завдання. Огляд характеристик нечітких чисел можна знайти у дослідженні [19], де автори пропонують використовувати медіанне значення та медіанний інтервал.

У дослідженні [20] автори пропонують новий індекс – евклідова відстань від нуля до центральної точки нечіткого числа, яка враховує і потужність носія нечіткого числа, і функцію належності. Запропонований індекс забезпечує високу вибірковість навіть у важких та неоднозначних випадках. Важливими додатковими характеристиками,

$$A = \{(x_i, \mu(x_i)), i = \overline{1, n}, x_{i+1} - x_i = \frac{d-a}{n-1}, x_0 = a, x_n = d\}, \quad (4)$$

де n – число дискрет (сегментів), d, a – нижня та верхня межі носія нечіткого числа.

У другому випадку нечітке число також є множиною пар:

$$A = \{(x_i^a, \alpha_i), (x_i^d, \alpha_i) \mid i = \overline{1, n}, \alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{n-1}, \alpha_0 = 0, \alpha_n = 1\}.$$

Дослідження [15] зазначає, що перший випадок є непридатним через можливі інформаційні втрати у разі, якщо інтервали обрані досить великими. Однак ми можемо побачити, що другий шлях також непридатний у випадку, якщо функція належності має кілька екстремумів. Тому для використання дискретизації осі ординат нечітке число необхідно апроксимувати тільки опуклою функцією належності. Але цим ми вноситимемо помилки в експертну думку. На нашу думку, найкращим рішенням є дискретизація осі абсцис за умови дотримання теореми Котельникова [27]. Таке

які можуть поліпшити рішення, є: ентропія (огляд підходів до використання ентропії можна знайти в дослідженні [21], а дослідження [22] пропонує простий метод для обчислення ентропії добутку двох нечітких інтервалів), міра ймовірності нечітких подій [23], нечітка міра відстані [23], кардинальність [25, 26].

Використання відомих підходів для вирішення завдань на практиці. Багато згаданих вище підходів прагнуть суворо виконати властивості арифметичних операцій і одночасно зменшити обчислювальну складність за рахунок представлення нечітких чисел у вигляді трикутників, трапецій або апроксимації. Не можна погодитися з думкою [14], що у практичних завданнях основна мета полягає не в тому, щоб точно змоделювати експертні судження, а в тому, щоб знайти гарне інженерне рішення. Іншими словами, автори [14] допускають використання спрощених виразів для функцій належності. На нашу думку, важливим є і точний опис експертних суджень, і їх коректні перетворення.

З цієї точки зору, інструменти для вирішення задач на практиці повинні дати можливість користувачеві представляти нечіткі числа з довільною формою функції належності. Найбільш підходящим способом представлення нечітких чисел є дискретизація. Як показано в дослідженні [15], дискретизація може бути реалізована шляхом поділу на однакові інтервали або осі абсцис (носій нечіткого числа), або осі ординат (функція належності). У першому випадку нечітке число представляється як множина пар:

представлення збільшує обчислювальну складність, однак у більшості випадків сучасні комп'ютери забезпечують необхідну швидкодію.

Негативною властивістю більшості відомих підходів до реалізації арифметичних операцій на нечітких числах є різке збільшення носія. Багато досліджень, наприклад [28, 29], відзначають цю властивість арифметичних операцій, заснованих на принципі розширення Заде. Ця властивість стає важливим недоліком у завданнях, у яких алгоритм розрахунку

багаторазово перетворює вихідні нечіткі величини.

Розглянемо найпростіший приклад. Рис. 1 ілюструє складання двох нечітких чисел, які мають потужність носія $|\text{Supp}(A)| = |\text{Supp}(B)| = 4$. Результат складання має потужність носія $|\text{Supp}(A + B)| = 8$. Якщо до результату послідовно додавати число B , то потужність носія щоразу буде збільшуватися на 4. Після п'яти додавань потужність носія результату

збільшиться до $|\text{Supp}(A + B + B + B + B + B)| = 24$, тобто в шість разів у порівнянні з вихідним нечітким числом (див. рисунок 2). Невизначеність результату також різко зростає.

Зокрема, для цього прикладу кардинальне число (сума ступенів належності) нечіткої множини зростає з $\text{Card}(A) = 2$ до $\text{Card}(A + B + B + B + B + B) = 12$.

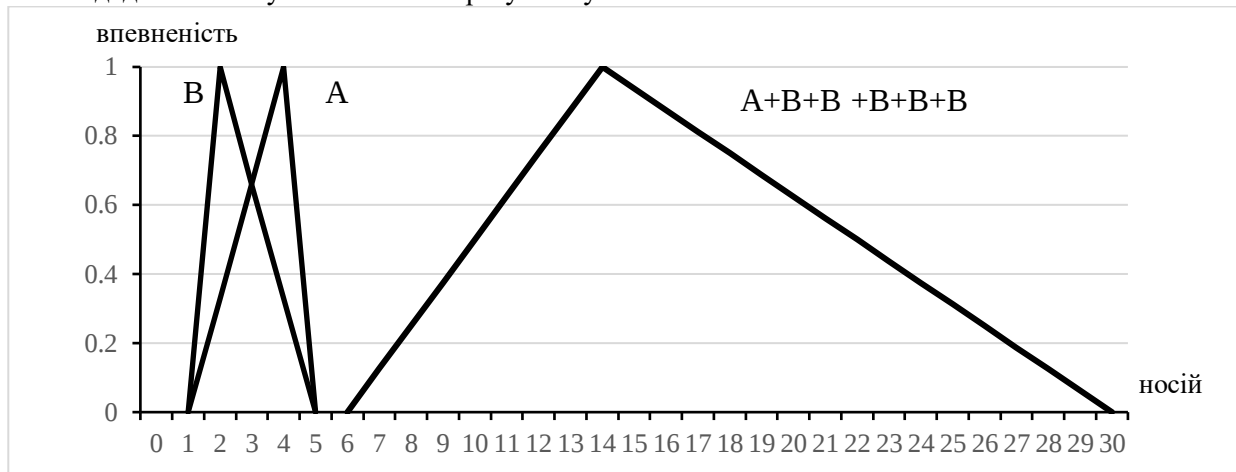


Рис. 2. Збільшення носія результуючого нечіткого числа та зміна форми функції належності під час підсумовування двох трикутних нечітких чисел

Очевидно, що великий розкид можливих значень нечіткої величини робить розрахунки з нечіткими числами малоприматними для прийняття рішення в практичних задачах. Якщо припустити, що в наведеному вище прикладі результат описує прогнозовану потребу в боєприпасах, то діапазон від 6 до 30 одиниць не придатний, щоб зробити висновок з логістики, оскільки ця оцінка практично рівнозначна повній невизначеності.

Звідси витікає **мета дослідження**, яка полягає в розробці алгоритму кількісних обчислень з нечіткими числами, який обмежує зростання носія числа-результату в разі виконання кількох арифметичних операцій.

Виклад основного матеріалу. Чи можна обмежити збільшення носія

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x \otimes y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y), R(x, y)\}, x, y, z \in \mathbb{R} \text{ і}$$

$${}^{\alpha}(A \otimes B)_R = \{x \otimes y \mid (x, y) \in ({}^{\alpha}A \times {}^{\alpha}B) \cap {}^{\alpha}R\},$$

де R є чітке чи нечітке бінарне відношення на множині ${}^{\alpha}A \times {}^{\alpha}B$.

Зауважимо, що обмеження для арифметичних виразів, що містять m нечітких чисел, формулюються як m мірні відносини.

Використання підходу [5] дозволяє обмежити носій нечітких чисел. Але при вирішенні практичних завдань виникають проблеми. Оскільки необхідні обмеження випливають із смислу операндів, важко

результуючого нечіткого числа? Дж. Клір запропонував [5] використовувати додаткову інформацію, яка не береться до уваги у стандартній нечіткій арифметиці [1]. Цю інформацію він представив у вигляді “необхідних обмежень”, які впливають із смислу операндів. Наприклад, обмеження рівності має бути враховано, коли обидва операнда є станами однієї і тієї ж лінгвістичної змінної, тобто базова змінна не може мати одночасно два різні значення. Дж. Клір запропонував додати до стандартної нечіткої арифметики обмеження у вигляді відношення на декартовому добутку двох нечітких інтервалів. Тоді стандартні вирази (2) та (3) записуються таким чином:

розробити обчислювальний алгоритм, який був універсальним всім задач. У кожному випадку набір обмежень має бути різним. Крім того, програмна реалізація алгоритму розраховує результат арифметичних виразів послідовно, відповідно до пріоритету арифметичних операцій. Це ускладнює реалізацію згаданих m -мірних відношень. Виходячи з цього, в універсальному обчислювальному алгоритмі можлива реалізація, мабуть, лише одного необхідного

обмеження – обмеження рівності. Однак, як зазначено у дослідженні [5], використання обмеження рівності не дає змоги обмежити носій результату у разі додавання.

Запропонований обчислювальний алгоритм. Для реалізації програмного забезпечення пропонується новий обчислювальний алгоритм арифметичних операцій с нечіткими числами, які мають довільну, необов'язково опуклу функцію належності. Такі нечіткі числа далі називаються числовими нечіткими множинами (ЧНМ). ЧНМ дискретизовані по осі абсцис і представлені парами (4). Як

$$A = \left\{ (x_i, \mu(x_i)), i = \overline{1, n}, x_{i+1} - x_i = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{n - 1}, x_0 = \underline{a}, x_n = \bar{a}, \mu(x_i) \in [0, 1] \right\},$$

$$B = \left\{ (y_j, \vartheta(y_j)), j = \overline{1, n}, y_{j+1} - y_j = \frac{\bar{b} - \underline{b}}{n - 1}, y_0 = \underline{b}, y_n = \bar{b}, \vartheta(y_j) \in [0, 1] \right\},$$

де $\underline{a}$ і $\bar{a}$ – нижня і верхня межі носія A , $\text{Supp}A = [\underline{a}, \bar{a}]$;

$\underline{b}$ і $\bar{b}$ – нижня та верхня межі носія B , $\text{Supp}B = [\underline{b}, \bar{b}]$, $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}$.

Крок 2. Отримання бінарного нечіткого відношення $D = A \times B$, що задовольняє умову:

$$D = \begin{Bmatrix} d_{00} & \dots & d_{0n} \\ \dots & d_{ij} & \dots \\ d_{n0} & \dots & d_{nn} \end{Bmatrix},$$

$$P = \left\{ (s_k, c_k), k \in \{1, 2, \dots, n^2\} \mid \omega_{s_k c_k} = \max_{i, j = \overline{1, n}} \omega_{ij} \right\}. \quad (5)$$

Крок 4. Визначення множини E потенційних рішень арифметичної операції.

Для кожної пари індексів $(s_k, c_k) \in P$ визначається два потенційних рішення, які є рядком $D_k^A = \{d_{s_k, j}, j = \overline{1, n}\}$, і стовпцем $D_k^B = \{d_{i, c_k}, i = \overline{1, n}\}$ відношення D . У цьому випадку $E = \bigcup_{k=\overline{1, |P|}} \{D_k^A \cup D_k^B\}$. Зауважимо, що для унімодальних дискретизованих ЧНМ $|E| = 2$.

Крок 5. Розрахунок ступеня невизначеності для кожного потенційного рішення.

Позначимо безліч E як $E = \{E_l, l = \overline{1, |E|}\}$, де $E_l = \{e_i^l, i = \overline{1, n}\} \subset D$, $e_i^l = \{(z_i^l, \omega_i^l) \mid z_i^l \in \mathbb{R}, \omega_i^l \in [0, 1]\}$. Тоді, за аналогією з [31], ступінь невизначеності дискретизованого ЧНМ розраховується так:

$$f(E_l) = \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1}^l - z_i^l) \cdot \omega_i^l.$$

Крок 6. Вибір рішення R арифметичної операції з множини E з максимальним ступенем невизначеності:

$$R = \arg \left\{ \max_{E_l \in E} f(E_l) \right\}.$$

показано [30], арифметичні операції можуть бути успішно реалізовані для випадку, коли нечіткі числа представлені в дискретизованому вигляді.

Запропонований алгоритм базується на поданні результату арифметичної операції у вигляді бінарного нечіткого відношення двох ЧНМ та виборі з цього відношення умовної проекції, яка має максимальну функцію належності та максимальний ступінь невизначеності. Розглянемо цей алгоритм.

Крок 1. Введення дискретизованих ЧНМ A та B згідно з (4):

$$\bar{a} - \underline{a}, x_0 = \underline{a}, x_n = \bar{a}, \mu(x_i) \in [0, 1] \Big\},$$

$$\bar{b} - \underline{b}, y_0 = \underline{b}, y_n = \bar{b}, \vartheta(y_j) \in [0, 1] \Big\},$$

де $d_{ij} = \{z_{ij}, \omega_{ij}\}$, $z_{ij} = x_i \otimes y_j$, $\omega_{ij} = \min(\mu(x_i), \vartheta(y_j))$,

$\otimes$ – позначення арифметичної операції.

Крок 3. Перегляд всіх елементів d_{ij} і знаходження множини P пар індексів, для яких функція належності максимальна:

Крок 7. Вивід R .

Зауважимо, що на практиці швидкодія сучасних комп'ютерів дозволяє без відчутної затримки виконувати досить велику кількість арифметичних операцій.

Також зауважимо, що потужність носія будь-якого потенційного рішення (див. Крок 2), отриманого запропонованим алгоритмом, завжди менша за потужність рішення, отриманого з використанням принципу розширення Заде (2), оскільки у представленні (4) носії обох нечітких чисел впорядковані за зростанням $x_{i+1} > x_i, i = \overline{1, n}$, то $|z_{in} - z_{i0}| < |z_{nn} - z_{00}|$ і $|z_{ni} - z_{0i}| < |z_{nn} - z_{00}| \forall i = \overline{1, n}$. З цього випливає, що:

запропонований алгоритм обмежує збільшення носія результуючого ЧНМ;

отримані алгоритмом рішення можна розглядати як часткові рішення традиційної нечіткої арифметики (2), на які повною мірою поширюються її закони і правила.

Числові приклади

Приклад 1. Розглянемо додавання двох ЧНМ A та B , які мають симетричні функції належності.

ЧНМ А										
1/0	1.2/0.2	1.4/0.4	1.6/0.6	1.8/0.8	2/1.0	2.2/0.8	2.4/0.6	2.6/0.4	2.8/0.2	3/0
ЧНМ В										
5/0	5.4/0.2	5.8/0.4	6.2/0.6	6.6/0.8	7/1.0	7.4/0.8	7.8/0.6	8.2/0.4	8.6/0.2	9/0
результат D=A+B										
6/0	6.4/0	6.8/0	7.2/0	7.6/0	8/0	8.4/0	8.8/0	9.2/0	9.6/0	10/0
6.2/0	6.6/0.2	7/0.2	7.4/0.2	7.8/0.2	8.2/0.2	8.6/0.2	9/0.2	9.4/0.2	9.8/0.2	10.2/0.2
6.4/0	6.8/0.2	7.2/0.4	7.6/0.4	8/0.4	8.4/0.4	8.8/0.4	9.2/0.4	9.6/0.4	10/0.2	10.4/0
6.6/0	7/0.2	7.4/0.4	7.8/0.6	8.2/0.6	8.6/0.6	9/0.6	9.4/0.6	9.8/0.4	10.2/0.4	10.6/0
6.8/0	7.2/0.2	7.6/0.4	8/0.6	8.4/0.8	8.8/0.8	9.2/0.8	9.6/0.6	10/0.4	10.4/0.2	10.8/0
E_1	7/0	7.4/0.2	7.8/0.4	8.2/0.6	8.6/0.8	9/1.0	9.4/0.8	9.8/0.6	10.2/0.4	10.6/0.2
	7.2/0	7.6/0.2	8/0.4	8.4/0.6	8.8/0.8	9.2/0.8	9.6/0.8	10/0.6	10.4/0.4	10.8/0.2
	7.4/0	7.8/0.2	8.2/0.4	8.6/0.6	9/0.6	9.4/0.6	9.8/0.6	10.2/0.6	10.6/0.4	11/0.2
	7.6/0	8/0.2	8.4/0.4	8.8/0.4	9.2/0.4	9.6/0.4	10/0.4	10.4/0.4	10.8/0.4	11.2/0.2
	7.8/0	8.2/0.2	8.6/0.2	9/0.2	9.4/0.2	9.8/0.2	10.2/0.2	10.6/0.2	11/0.2	11.4/0.2
	8/0	8.4/0	8.8/0	9.2/0	9.6/0	10/0	10.4/0	10.8/0	11.2/0	11.6/0
										12/0

E_2

Відношення D має лише один елемент з максимальним ступенем належності $d_{6,6} = (9/1.0)$. Множина E складається з двох потенційних рішень: $E_1 = \{d_{6,j}, j = \overline{1, n}\}$ і $\{E_2 = d_{i,6}, i = \overline{1, n}\}$, які мають ступені невизначеності $f(E_1) = 2, f(E_2) = 1$.

Відповідно до запропонованого алгоритму, результат додавання $R = \{(z_{6j}, \omega_{6j}), j = \overline{1, n}\}$ розташований у

рядку і має потужність носія $|SuppR| = 4$. Для порівняння, результат додавання Q , розрахований за принципом розширення Заде, розташований по діагоналі нечіткого відношення D . Ступінь невизначеності даного рішення $f(Q) = 3$, а потужність носія складе $|SuppQ| = 6$.

Приклад 2. Розглянемо додавання ЧНМ, показаних на рис. 1.

ЧНМ А										
1/0	1.4/0.2	1.8/0.4	2.2/0.6	2.6/0.8	3/0.9	3.4/1.0	3.8/0.7	4.2/0.4	4.6/0.2	5/0
ЧНМ В										
1/0	1.4/0.2	1.8/0.4	2.2/0.7	2.6/1.0	3/0.9	3.4/0.8	3.8/0.6	4.2/0.4	4.6/0.2	5

потенційне рішення $E_1 = A + B$

4.4/0	4.8/0.2	5.2/0.4	5.6/0.7	6/1.0	6.4/0.9	6.8/0.8	7.2/0.6	7.6/0.4	8/0.2	8.4/0
-------	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------	-------	-------

потенційне рішення $E_2 = A + B$

3.6/0	4/0.2	4.4/0.4	4.8/0.6	5.2/0.8	5.6/0.9	6/1.0	6.4/0.7	6.8/0.4	7.2/0.2	7.6/0
-------	-------	---------	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	-------

Цей приклад показує, що у деяких випадках запропонований алгоритм потребує додаткових умов вибору однозначного рішення R з E .

Як бачимо, два ЧНМ з множини потенційних рішень E мають однакову потужність носія, їх функції належності несиметричні щодо своїх максимумів, але симетричні відносно одне до одного. Тут запропонований алгоритм отримав два потенційні рішення з однаковими ступенями невизначеності: $f(E_1) = f(E_2) = 2.08$, тобто будь-яке з цих рішень може бути результатом.

Яке рішення вибере алгоритм залежатиме тільки від його програмної реалізації.

Зауважимо, що форма функції належності E_1 відповідає операнду B , а E_2 – операнду A . Тому функція належності результату повторюватиме функцію належності одного з операндів. У випадку, якщо носії операндів мають різні потужності, функція належності буде мати форму того операнда, який є більш невизначеним. Операнд з більшою невизначеністю містить більше інформації та поглинає менш невизначений операнд, що можна вважати природним з погляду принципу збереження

ентропії. Іншими словами, запропонований алгоритм вибирає рішення з максимальним ступенем невизначеності та одночасно прагне зберегти інформацію про форму функції належності вихідних ЧНМ.

З точки зору принципу збереження ентропії, на відміну від запропонованого алгоритму, стандартна нечітка арифметика максимально зберігає невизначеність вихідних операндів за рахунок збільшення потужності носія, проте втрачає інформацію про форму

функції належності операндів. Це можна побачити на рис. 3, де функція належності ЧНМ A є більш пологою праворуч, функція належності ЧНМ B є більш пологою ліворуч і більш невизначеною (оскільки $CardB > CardA$), проте результат $(A + B)$ є більш пологий праворуч. Іншими словами, функція належності результату набуде форми менш невизначеного операнда.

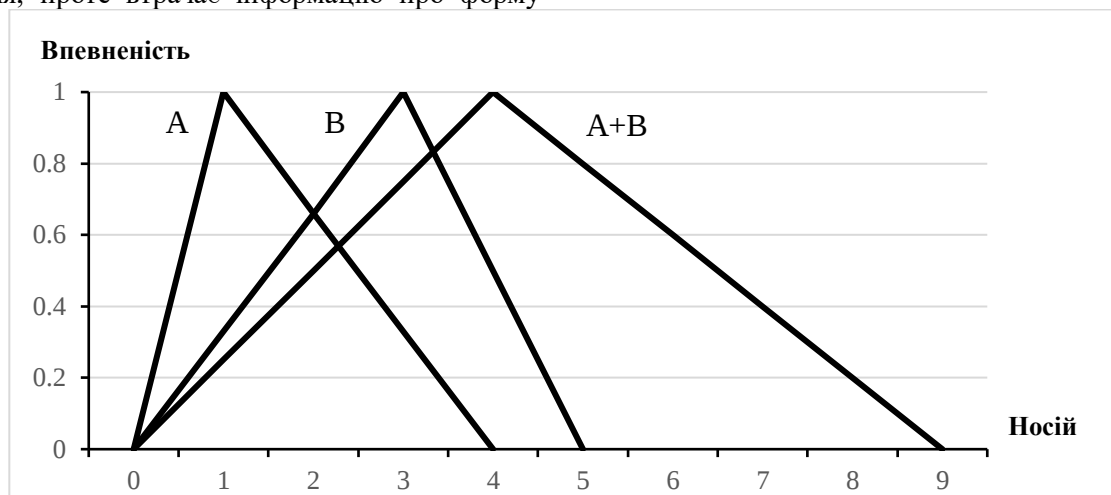


Рис. 3. Зміна форми функції належності при додаванні двох трикутних нечітких чисел з різною невизначеністю

Приклад 3. Розглянемо зміну носія ЧНМ внаслідок виконання кількох арифметичних операцій, використовуючи ЧНМ A і B , що показані на рис. 2.

Дискретизація не впливатиме на висновки, оскільки нас цікавить потужність носія, який представлений точно. Результат додавання $(A + B + B + B + B + B)$ показано нижче:

ЧНМ A										
1/0	1,4/0,14	1,8/0,29	2,2/0,43	2,6/0,57	3/0,71	3,4/0,86	3,8/1,0	4,2/0,66	4,6/0,33	5/0
ЧНМ B										
1/0	1,4/0,33	1,8/0,66	2,2/1,0	2,6/0,86	3/0,71	3,4/0,57	3,8/0,43	4,2/0,29	4,6/0,14	5/0
результат A+B										
4,8/0	5,2/0,33	5,6/0,66	6/1,0	6,4/0,86	6,8/0,71	7,2/0,57	7,6/0,43	8/0,29	8,4/0,14	8,8/0
результат A+B+B										
8,6/0	9/0,33	9,4/0,66	9,8/1,0	10,2/0,86	10,6/0,71	11/0,57	11,4/0,43	11,8/0,29	12,2/0,14	12,6/0
результат A+B+B+B										
12,4/0	12,8/0,33	13,2/0,66	13,6/1,0	14/0,86	14,4/0,71	14,8/0,57	15,2/0,43	15,6/0,29	16/0,14	16,4/0
результат A+B+B+B+B										
16,2/0	16,6/0,33	17/0,66	17,4/1,0	17,8/0,86	18,2/0,71	18,6/0,57	19/0,43	19,4/0,29	19,8/0,14	20,2/0
результат A+B+B+B+B+B										
20/0	20,4/0,33	20,8/0,66	21,2/1,0	21,6/0,86	22/0,71	22,4/0,57	22,8/0,43	23,2/0,29	23,6/0,14	24/0

Як бачимо, потужність носія результату не змінюється: $|\text{Supp}(A + B)| = |\text{Supp}(A + B + B)| = \dots = 4$. На практиці ця властивість запропонованого алгоритму дозволяє отримати результат, придатний до прийняття рішення. З цього також слідує, що рівень невизначеності результату дорівнює рівню

невизначеності вихідних операндів. Тобто операція додавання не додає невизначеності в результат. Це представляється цілком логічним.

Аналіз властивостей пропонованого алгоритму. Використання запропонованого

алгоритму пов'язане з двома питаннями, які потребують дискусії.

Питання 1. Про необхідність виконання властивостей стандартної арифметики. Судячи з кількості публікацій, багато авторів вважають за необхідне суворе дотримання властивостей стандартної арифметики дійсних чисел під час виконання арифметичних операцій із ЧНМ. Проте, як було показано вище, ефективність стандартної арифметики на практиці виявляється сумнівною через різке зростання носія результуючого ЧНМ. Ці сумніви є мотивом для перегляду вимог до властивостей нечіткої арифметики і породжують концептуальне питання: чому нечітка арифметика має дотримуватись правил, запроваджених у стандартній арифметиці? Спробуємо відповісти на це запитання.

Нечіткі множини є розширенням традиційних множин. Зокрема, концепція нечіткої множини дозволила використовувати розширений діапазон значень для вимірювання належності елементів до множини, а також дозволила представити стандартні множини як окремий випадок нечітких множин.

Але розширення значить збереження актуальності обмежень вихідного концепту, оскільки він тепер є частковим випадком розширеного концепту. Навпаки, природно припустити, що окремий випадок породжується із розширеного випадку шляхом запровадження додаткових обмежень, які звужують розширений концепт. Тому, на наш погляд, прагнення поширити властивості арифметики дійсних чисел на нечітку арифметику є сумнівним. Це припущення породжує таке питання: яким чином слід змінити властивості арифметики дійсних чисел?

На наш погляд, відповідь має впливати із природи невизначеності як узагальнення. Можна погодитись з думкою дослідження [6] щодо заміни відношення суворої еквівалентності відношенням адитивної та мультиплікативної, тобто більш м'якої еквівалентності. Оскільки нечіткі числові величини можна представити як узагальнення стандартних числових величин, то й властивості арифметичних операцій на ЧНМ природно і логічно представити як узагальнення властивостей стандартної арифметики.

Питання 2. Про принцип розширення Заде. Відповідно до цього принципу, результат арифметичної операції формується шляхом

поєднання всіх можливих комбінацій елементів носіїв ЧНМ, щоб не допустити інформаційних втрат. Це є причиною різкого збільшення потужності носія результуючого ЧНМ при розрахунку результату арифметичного виразу.

У першому числовому прикладі можна помітити, що згідно з принципом розширення Заде результат арифметичної операції розташований по діагоналі відносини D . Однак це справедливо лише для випадку симетричних функцій належності обох операндів. Якщо ми перемістимо максимум функції належності одного з операндів, носій результату залишиться на діагоналі, а максимум функції належності переміститься на інше місце. Тобто у відношенні D результуюче ЧНМ буде розшаровуватися. Використання операції супремуму дозволяє уникнути впливу цього ефекту, проте через цю операцію форма функції належності змінюється і таку зміну важко пояснити.

Результат, отриманий на основі принципу розширення Заде, схожий на діагональну проекцію бінарного нечіткого відношення, яка отримується шляхом згортання за допомогою супремуму:

$$R = \{(r_j, \varphi_j), r_j \in \mathbb{R}, \varphi_j \in [0,1], j = \overline{1, n}\},$$

де $r_j = z_{i=j}, i, j = \overline{1, n}, \varphi_j = \sup_{i=\overline{1, n}} \omega_{ij}$.

Тоді запропонований алгоритм можна розглядати як алгоритм отримання умовної проекції того ж відношення D , де умовою є максимум функції належності (5). Іншими словами, запропонований алгоритм отримує рішення не шляхом згортання елементів відношення, а шляхом вибору однієї з умовних проекцій.

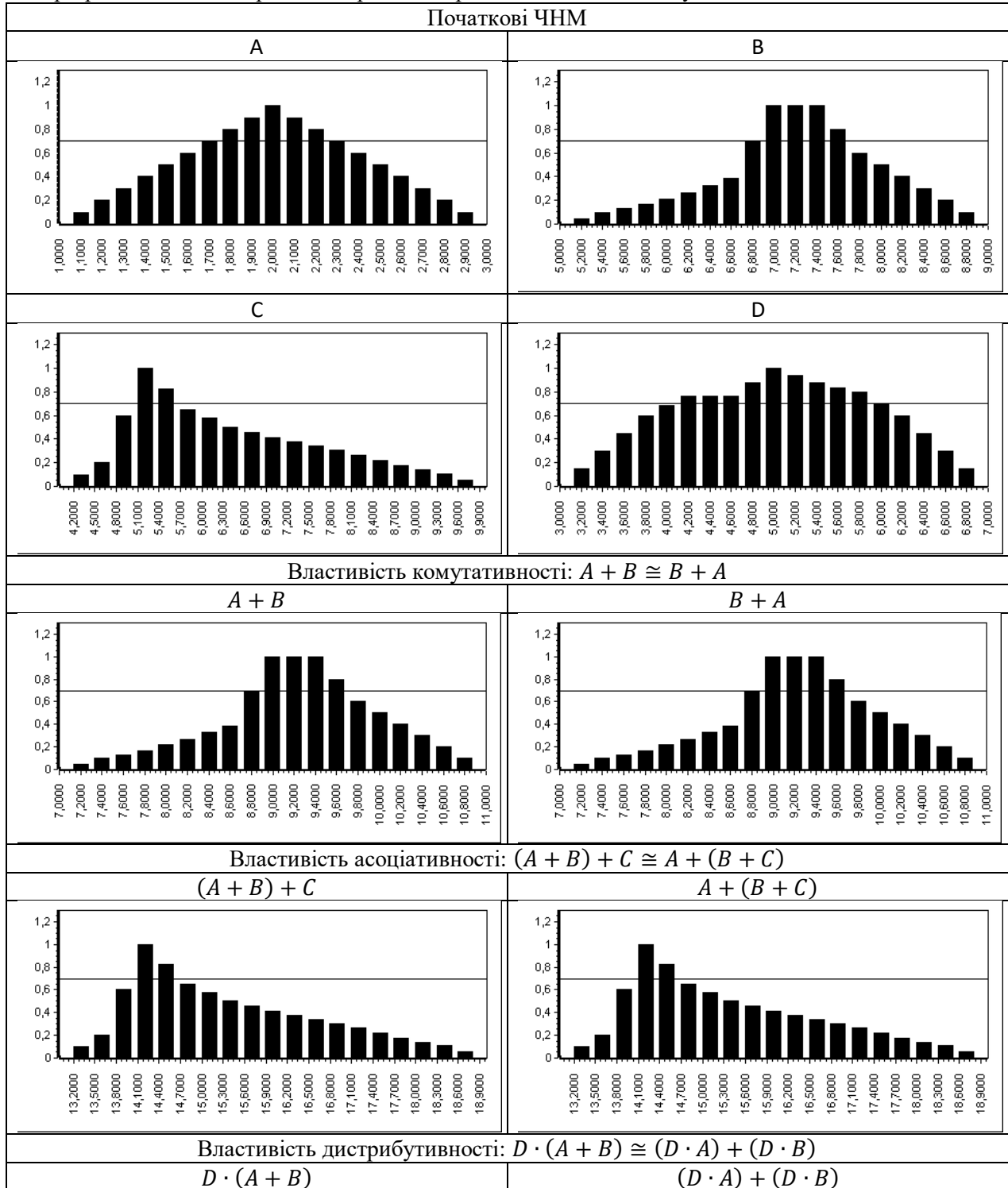
Повертаючись до розглянутого першого питання, можна зазначити наступне. Оскільки запропонований алгоритм вводить додаткову умову, яка звужує узагальнене рішення, то рішення цього алгоритму будуть обмежені, але збережуть властивості узагальненого концепту.

На рис. 4 продемонстровано збереження властивостей традиційної нечіткої арифметики у запропонованому алгоритмі. Як видно з рисунку, дотримання трьох головних властивостей стандартної арифметики має місце – форми функції належності і носії нечітких чисел співпадають. Фрагменти знімків екрана отримані за допомогою надбудови “Fuzzy для Excel”.

Реалізація запропонованого алгоритму в офісному програмному забезпеченні Microsoft Excel. Багато дослідників не розглядали розроблені алгоритми нечіткої арифметики як виключно наукові досягнення. Вони широко застосовували ці алгоритми для вирішення

практичних завдань [32-35], часто з допомогою спеціальних пакетів програм, таких як “Математика”. Іноді дослідники самостійно розробляли спеціальні програми [36-38]. Однак ці програми не стали широко поширеними через

вузьку спеціалізацію або складність інтерфейсу користувача. Іншими словами, проблема доступності нечіткої арифметики для широкого кола інженерів та аналітиків сьогодні залишається актуальною.



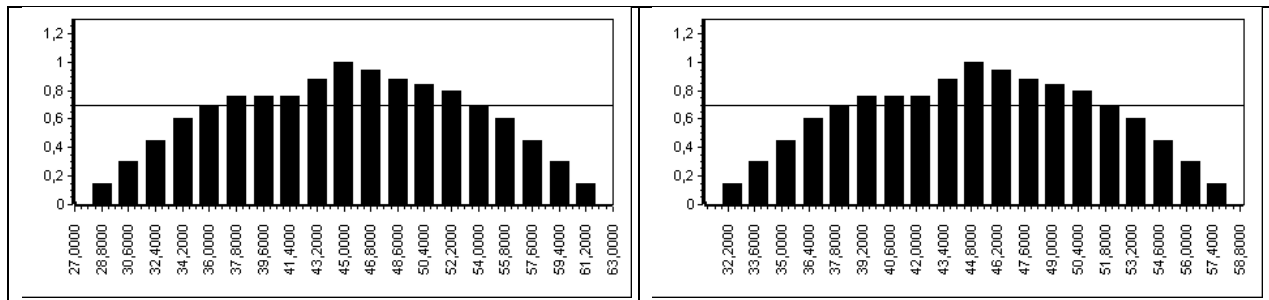


Рис. 4. Збереження властивостей традиційної нечіткої арифметики в запропонованому алгоритмі

Звертаючи увагу на це, автори розробили надбудову “Fuzzy for Excel” для офісного програмного забезпечення “Microsoft Excel”, яке широко використовується для

https://1drv.ms/f/c/6a215c39cc7b74ec/Eq_Y17O-kVtOoOb5EmLyDecB9lRLlvWE3yUXyaJ0Kw03LA.

Інсталяція надбудови дуже проста і описана в інструкції, яка теж розташована за наведеним посиланням.

Для спрощення в надбудові ЧНМ називаються нечіткими числами. Вони видаються у вигляді дискретизованих нечітких множин, які складаються з 21-го елемента носія та відповідних значень функції належності. Надбудова реалізує багато інструментів та функцій, які забезпечують створення, обробку та аналіз нечітких чисел. Також надбудова містить кілька функцій для опису та обробки невизначеності за допомогою нечітких мір Сугено [39] та нечітких інтегралів. Основи функціонування надбудови, а також опис інструментів і функцій містяться в системі допомоги та посібнику з використання.

Висновки. Запропонований алгоритм виконання арифметичних операцій не суперечить базовим властивостям стандартної нечіткої арифметики. Алгоритм забезпечує обмеження носія результуючого ЧНМ, а також те, що рівень невизначеності результату визначається рівнем невизначеності вихідних даних. Запропонований алгоритм не вносить додаткової невизначеності. Це дозволяє на практиці поліпшити якість даних для прийняття рішень, що важливо у разі виконання великої кількості арифметичних операцій під час оперативних розрахунків. Запропонований алгоритм має велику обчислювальну складність, проте це не є перешкодою для реалізації алгоритму в програмному забезпеченні з огляду на швидкодію сучасних комп'ютерів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Zadeh L. A. The Concept of linguistic variable and its applications to approximate reasoning //

виконання арифметичних розрахунків в різних сферах науки, техніки и бізнесу. Посилання для завантаження:

- Information Sciences. 1975. Vol. 8. P. 199–251. DOI: 10.1016/0020-0255 (75) 90046-8.
2. Dubois D., Prade H. Operation on fuzzy numbers // International Journal of Systems Science. 1978. Vol. 9. P. 613–626. DOI: 10.1080/00207727808941724.
3. Yager R. R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic // Fuzzy Sets та Systems. 1980. Vol. 4. P. 73–82. DOI: 10.1016/0165-0114(80)90065-2.
4. Mizumoto M., Tanaka K. The four operations on fuzzy numbers // System Compute Controls. 1976. Vol. 7. P. 703–710.
5. George J. Klir. Fuzzy arithmetic with requisite constraints // Fuzzy Sets та Systems. 1997. Vol. 91. P. 167–175. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00138-3.
6. Mares M. Weak arithmetics of fuzzy numbers // Fuzzy Sets та Systems. 1997. Vol. 91. P. 143–153. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00136-X.
7. Thowhida Akther and Sanwar Uddin Ahmad. A Computational Method for Fuzzy Arithmetic Operations // Daffodil International University Journal of Science and Technology. January 2009. Vol. 4., Issue 1. DOI: 10.3329/diujst.v4i1.4350.
8. Barnabás Bede. Product Type Operations between Fuzzy Numbers and its Applications in Geology // Acta Polytechnica Hungarica. 2006. Vol. 3, No. 1. P. 123–139.
9. Kumar A., Kaur M. An algorithm for solving fuzzy maximal flow problems using generalized triangular fuzzy numbers // International journal of hybrid intelligent systems. 2011. Vol. 8, Issue 1. P. 15–24. DOI: 10.3233/HIS-2011-0127.
10. Патінатан Т., Сантошкумар С. Quadrilateral Fuzzy Number // International Journal of Engineering & Technology. 2018. Vol. 7 (4.10). P. 1018–1021. DOI: 10.14419/ijet.v7i4.10.26661.
11. Coroianu L., Gagolewski M., Grzegorzewski P., Firozja M. A., Houlari T. Piecewise Linear Approximation of Fuzzy Numbers Preserving the Support and Core. In: Laurent A., Strauss O., Bouchon-Meunier B., Yager R.R. (eds) // Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2014. Communications in Computer and Information

- Science. 2014. Vol. 443. P. 244–253. DOI: 10.1007/978-3-319-08855-6_25.
12. Kechagias P. S., Basil K. Papadopoulos. Computational method to evaluate fuzzy arithmetic Operations // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 185, Issue 1. P. 169–177. DOI: 10.1016/j.amc.2006.07.019.
13. Guerra M. L., Stefanini L. Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations // Fuzzy Sets та Systems. 2005. Vol. 150, Issue 1. P. 5–33. DOI: 10.1016/j.fss.2004.06.007.
14. Kosheleva O., Cabrera S. D., Gibson G. A., Koshelev M. Fast implementations of fuzzy arithmetic operations using fast Fourier transformation (FFT) // Fuzzy Sets та Systems. 1997. Vol. 91, Issue 2. P. 269–277. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00147-4.
15. Hanss M. On the implementation of fuzzy arithmetic operations for engineering problems. 18th International Conference of North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS (Cat. No.99TH8397). New York, USA, 1999. P. 462–466. DOI: 10.1109/NAFIPS.1999.781736.
16. Kosinski W., Prokopowicz P., Slezak D. On Algebraic Operations on Fuzzy Numbers // Conference Paper. January 2003. DOI: 10.1007/978-3-540-36562-4_37.
17. Mareš M. Multiplication of Fuzzy Quantities // Kybernetika. 1992. Vol. 28, Issue 5. P. 337–356. URL: <https://eudml.org/doc/29014> (дата звернення: 10.02.2025).
18. Minaev Y. M., Filimonova O. Yu., Minaeva J. I. Multi-Fuzzy Sets as Aggregation Subjective and Objective Fuzziness // Mathematics. Information Technologies. Education : Workshop Proceedings of 8th International Conference, MoML&T&DS-2019. Shatsk, Україна. 2019. June 2-4. P.163–182. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2386/paper13.pdf> (дата звернення: 10.02.2025).
19. Bodjanova S. Median value and median interval of a fuzzy number // Information Sciences. 2005. Vol. 172, Issue 1. P. 73–89. DOI: 10.1016/j.ins.2004.07.018.
20. Cheng Ching-Hsue. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method // Fuzzy Sets та Systems. 1998. Vol. 95, Issue 3. P. 307–317. DOI: 10.1016/S0165-0114(96)00272-2.
21. Baoding L. A Survey of Entropy of Fuzzy Variables // Journal of Uncertain Systems. 2007. Vol. 1, Issue 1. P. 4–13. URL: <http://www.worldacademicunion.com/journal/jus/jusVol01No1paper01.pdf> (дата звернення: 12.02.2025).
22. Luoh L., Wang W.-J. A simple method for computing the entropy of the product of general fuzzy intervals // Mathematics and Computers in Simulation. Vol. 58, Issue 1. P. 37–49. DOI: 10.1016/S0378-4754(01)00318-4.
23. Lee E.S., Li R.-J. Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 15, Issue 10. P. 887–896. DOI: 10.1016/0898-1221(88)90124-1.
24. Tran L., Duckstein L. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measur // Fuzzy Sets та Systems. 2002. Vol. 130, Issue 3. P. 331–341. DOI: 10.1016/S0165-0114(01)00195-6.
25. Dhar M. Cardinality of Fuzzy Sets: An Overview // International Journal of Energy, Information and Communications. 2013. Vol. 4, Issue 1. P. 15–21. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/6e10/e504e0761f60bc957ebfddae592d6efbef30.pdf> (дата звернення: 12.02.2025).
26. Chamorro-Martínez J., Sánchez D., Soto-Hidalgo J. M., Martínez-Jiménez P. M. A discussion on fuzzy cardinality and quantification. Some applications in image processing // Fuzzy Sets та Systems. 2014. Vol. 257. P. 85–101. DOI: 10.1016/j.fss.2013.05.009.
27. Kotelnikov V. A. On the carrying capacity of the ether and wire in Telecommunications. Material for the First All-Union Conference on Questions of Communication Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA. Москва, 1933. Reprint article in the journal UFN. 2006. Vol. 176, No. 7. P. 762–770.
28. Stefanini L., Laerte S., Prof. Maria. Fuzzy Numbers and Fuzzy Arithmetic. In book : Handbook of Granular Computing. 2008. P. 249–283. DOI: 10.1002/9780470724163.ch12.
29. Haitao Liu and Sizong GUO. Equality and Identity of Fuzzy Numbers and Fuzzy Arithmetic with Equality Constraints // International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering 2007. P. 334–339. DOI: 10.2991/iske.2007.56.
30. Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application // Mathematics in Science and Engineering. 1980. Vol. 144.
31. Chakravarty S. R., Roy T. Measurement of fuzziness : A general approach // Theory and Decision. 1985. Vol. 19. P. 163–169. DOI: 10.1007/BF00132441.
32. Shyi-MingChen. Evaluating weapon systems using fuzzy arithmetic Operations // Fuzzy Sets та Systems. 1996. Vol. 77, Issue 3. P. 265–276. DOI: 10.1016/0165-0114(95)00096-8.
33. Kosheleva O., Kreinovich V., Bouchon-Meuiner B., Mesiar R. Operations with Fuzzy Numbers Explain Heuristic Methods в Image Processing. 1998. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/6410/2c69e93a6145ff86e717e7ac57034c5f44ab.pdf> (дата звернення: 12.02.2025).
34. Zimmermann H.-J., Zysno P. Decisions and evaluations by hierarchical aggregation of information // Fuzzy Sets та Systems. 1983. Vol. 10. Issue 1-3. P. 243–260. DOI: 10.1016/S0165-0114(83)80118-3.
35. Kochegurova E. A., Martynova Yu. A. Aspects of Continuous User Identification Based on Free Texts and Hidden Monitoring // Programming and Computer Software. Vol. 2020. 46. P. 12–24. DOI: 10.1134/S036176882001003X.
36. Kolesnik R., Prokopowicz P., Kosinski W. Fuzzy Calculator – Useful Tool for Programming with Fuzzy Algebra. 2004. DOI: 10.1007/978-3-540-24844-6_45. URL: <https://www.researchgate.net/>

- publication/227282965_Fuzzy_Calculator_-_Useful_Tool_for_Programming_with_Fuzzy_Algebra (дата звернення: 13.02.2025).
37. Gagolewski M., Caha J. A Guide to the FuzzyNumbers Package for R (FuzzyNumbers version 0.4-2). 2018. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/FuzzyNumbers/vignettes/FuzzyNumbersTutorial.pdf> (дата звернення: 13.02.2025).
38. Marin M., Defour D., Milano F. An Efficient Representation Format for Fuzzy Intervals Based on Symmetric Membership Functions // ACM Transactions on Mathematical Software. 2016. DOI: 10.1145/2939364.
39. Sugeno M. Theory of fuzzy integrals and its applications. Ph.D. Thesis. Tokyo Institute of Technology. Tokyo, 1974.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.03.2025

Fuzzy Quantitative Computing Algorithm for Operational Calculations

Annotation

Performing arithmetic computations during operational calculations is almost always associated with quantitative values that can only be estimated approximately. Examples include the distance to the front line (line of contact), the number of weapons and military equipment, the time required to execute a maneuver, and others. The uncertainty of quantitative values may arise from various sources, such as incomplete data, imprecise linguistic descriptions, or other factors.

To perform arithmetic operations under such conditions, the user must have at least three tools for: defining the values of initial fuzzy quantities;

calculating the resulting fuzzy quantities (in most cases, four basic arithmetic operations – addition, subtraction, multiplication, and division – as well as ranking are sufficient);

computing the characteristics of the resulting fuzzy quantities for decision-making.

The aim of this study is to develop an algorithm for quantitative computations with fuzzy numbers that restricts the growth of the support of the result when performing multiple arithmetic operations.

This paper proposes a new algorithm of fuzzy arithmetic (performing arithmetic operations with operands represented as fuzzy numerical values) for operational calculations. Unlike known algorithms, the proposed one effectively constrains the expansion of the result's support in a sequence of multiple arithmetic operations, making it suitable for operational calculations under uncertainty. This improvement enhances the quality of data for decision-making in practice, which is particularly important when carrying out a large number of arithmetic operations in operational contexts. Although the algorithm has relatively high computational complexity, this does not hinder its implementation in software, considering the performance of modern computers.

Keywords: fuzzy arithmetic; fuzzy numerical value; maximum entropy principle; fuzzy sets; algorithm; operational calculations.